

GRUNDLAGEN LINIEN & KURVEN



Nurbsbasierte Software

„Non-uniform rational B-Splines (deutsch: nicht-uniforme rationale B-Splines, kurz NURBS) sind mathematisch definierte Kurven oder Flächen, die im Computergrafik-Bereich, beispielsweise im CGI oder CAD, zur Modellierung beliebiger Formen verwendet werden“ (wikipedia.org/Non-Uniform_Rational_B-Spline)

CGI bedeutet Computer Generated Imagery und wird im Bereich der Filmproduktion, Computersimulation und visueller Effekte eingesetzt.

Polynome

Eine „B-Spline-Kurve“ kann jeden beliebigen nicht-verzweigten stetigen Polynomzug darstellen. (Ebd.) Das bedeutet, dass sie immer nur einen Anfangs- und Endpunkt besitzt und aus einer bestimmten Anzahl von Polynomen besteht. An den Stellen, an denen zwei Polynome zusammenstoßen, spricht man von Knoten.

Spline

Eine Spline hat also eine bestimmte Anzahl Knoten. Diese sind von der Gesamtanzahl der Polynome einer Spline abhängig. In den nurbsbasierten CAD Programmen spricht man vom Grad einer Spline und sagt damit auch etwas über den Grad der Polynome aus. Im weiteren Verlauf werde ich anstelle von Splines und Polynomzügen auch die synonymgebrauchte Bezeichnung Kurve einsetzen.

Näherung

Ein Polynom ersten Grades ist eine Linie. Diese Linie besitzt einen Anfang und Endpunkt. Einen Polynomzug ersten Grades wird auch Polylinie genannt. Ein Polynom zweiten Grades kann linear sein, aber auch eine Krümmung besitzen und sich dadurch besser einer gewünschten Form annähern.

Vereinfachend lässt sich sagen: je höher der Grad ist, desto genauer kann die Näherung sein. Der Begriff der Näherung stammt aus der Mathematik und meint zum Beispiel das Annähern eines Polynoms N-ten Grades an eine Sinuskurve (Abb1).

In der Gestaltung von Nurbs-Flächen mithilfe von Nurbs-Kurven gibt es verschiedene Arbeitsstrategien und Aufgabenstellungen.

Innerhalb dieser ist einerseits eine Näherung an einen bereits vorhandenen Kurven- oder Flächenverlauf gefordert, oder es erfolgt ein freies modellieren ohne Vorgabe.

Beim sogenannten Surface Re-Engineering werden Kurven anhand gegebener Punktwolken modelliert.

Auflösung einer NURBS-Fläche

In jedem Fall sind Grundkenntnis über die Grade von Kurven und Polynomen notwendig, um genaue Ergebnisse zu erzielen. Für einen sauberen Flächenaufbau mit geeigneter Auflösung ist ein bestimmtes Verhältnis aus Kurvengrad und Knotenpunktzahl essentiell. Die Auflösung der Fläche wird im Abschnitt 4 „Gestalten in 3D“, anhand der Iso-Kurven dargestellt.

Kurvengrad

Eine Faustregel besagt, dass der Kurvengrad(G), hier im speziellen einer Bezier-Kurve, + 1 die Anzahl der Knotenpunkte(KP) bzw. Kontrollpunkte darstellen sollte ($G+1=KP$). (Ebd.) Bezier-Kurven sind parametrische Kurven und können mithilfe der sogenannten Kontrollpunkte (CV = Control-Vertices) sehr gut bearbeitet werden.

Das Bewegen der einzelnen CV's im Koordinatensystem (X,Y,Z) der CAD Software beeinflusst den Kurvenverlauf.

Kontroll- oder Knotenpunkte

Der Unterschied zwischen den Polynom-Knotenpunkten und den Bezier-Kontrollpunkten (Abb.4) liegt darin, dass der Verlauf einer ausgeglichenen Kurve durch die CV's der Bezier-Kurve approximiert (angenähert) wird. Diese Punkte liegen dementsprechend nicht direkt in den Schnittpunkten der Polynome. Die Polynome, welche an den Knotenpunkten zusammentreffen, sind interpoliert. Wird eine Kurve also interpoliert, heißt das, sie geht direkt durch eine Anzahl von Punkten.

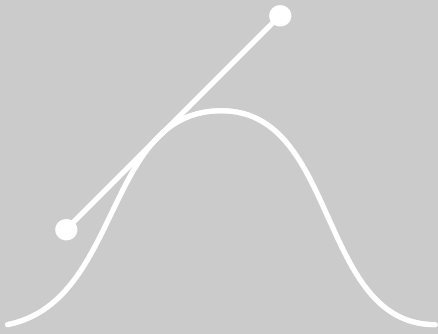


Abb. : Polynom 1.Grades
an einer Sinuskurve

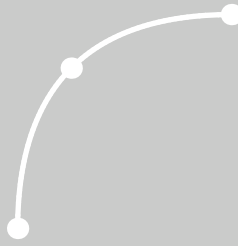


Abb. 1: Polynom
2.Grades

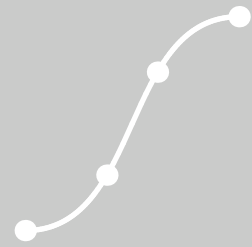


Abb. 2: Polynom
3.Grades

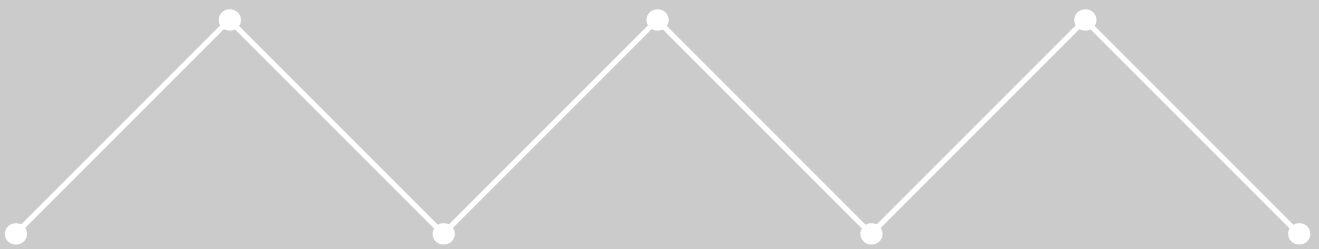
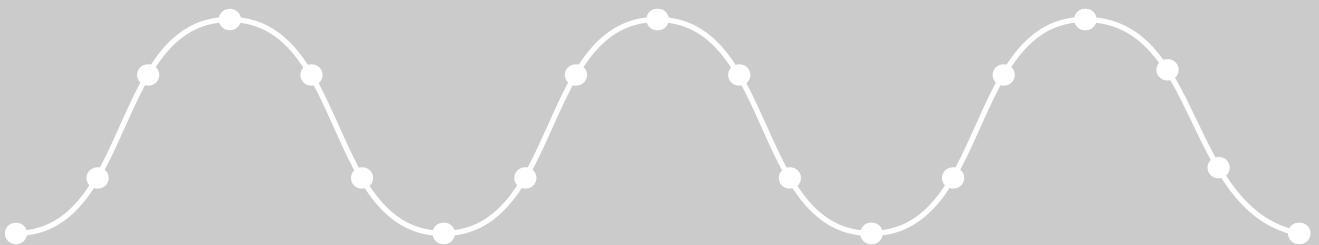
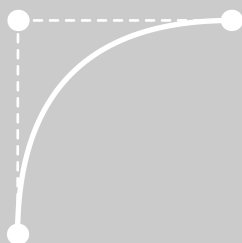


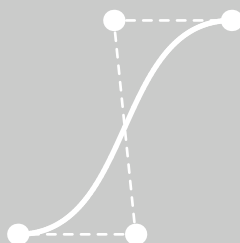
Abb. 3: Knotenpunkte eines
Polynomzuges 1.Grades



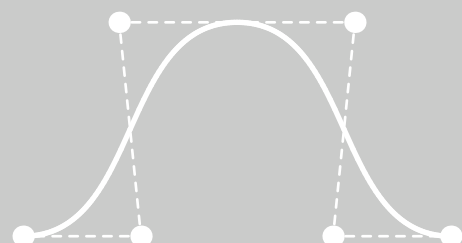
Knotenpunkte eines
Polynomzuges 3.Grades



Bezier Kontrollpunkte
Polynom 2.Grades



Bezier Kontrollpunkte
Polynom 3.Grades



Bezier Kontrollpunkte
Polynomzuges 3.Grades

Abb. 4: Approximieren & Interpolieren

Stetigkeiten

Der Grad der Stetigkeit innerhalb eines Polynomzuges sagt etwas zum Übergang der einzelnen Polynome ineinander aus. Bei einer Positionsstetigkeit (G0) teilen sich zwei Polynome zwar einen gemeinsamen Knotenpunkt, aber es gibt aber keine stetige Annäherung der Krümmungen.

G1 - Tangentialität

Eine Stetigkeit von G1 besagt einen tangentialen Übergang. In anderen Worten, die beiden Polynome oder Kurven berühren sich nicht nur, sondern weisen am Knotenpunkt, die gleiche Richtung auf. Die Richtung wird durch den zweiten Punkt einer Kurve bestimmt. Wenn zwei dieser Punkte auf eine Kurve fallen, sind die beiden Kurven an den Enden tangent.

G2 - Krümmung

Die Krümmungsstetigkeit (G2-Stetigkeit) zwischen zwei Kurven berechnet Position, Richtung und Krümmungsradius an den Enden. Wenn der Krümmungsradius am gemeinsamen Endpunkt gleich ist, sind die Kurven krümmungsstetig (G2). Die Kurven gehen also nicht nur in die gleiche Richtung, wenn sie aufeinandertreffen, sondern haben an diesem Punkt auch den gleichen Radius.

In der Regel reichen die Stetigkeitsbeschreibungen innerhalb gängiger CAD Software von:

- G0 – Position,
- G1 - Tangentialität bis
- G2 –Krümmung .

G3 – Radiusbeschleunigung, findet sich meistens nicht mehr innerhalb der Analysewerkzeuge zur Kontrolle der Stetigkeiten.

elektronische Strakung

Hans-Günther Schiel beschreibt in seinem Standardwerk zur „Computergrafik für Ingenieure“ die Basisbegriffe der CAD Modellierung und verweist im Kapitel „Kurven und gekrümmte Flächen“ auf die Anfänge der „elektronischen Strakung“ (Vgl. Schiel; 2012:S43).

Der Begriff Straken stammt aus dem Schiffs- und Flugzeugbau und meint einen harmonischen Verlauf der Außenkonturen von Rumpf und Flügeln. Vor dem Entwurf digitaler Splines wurde mit Hilfe einer langen dünnen Latte,

der Straklatte, englisch spline, der Verlauf einer ausgeglichenen „kubischen Spline“ (Ebd.) erzeugt. Die Polynome einer kubischen Spline weisen Stetigkeiten von G1 – G2 auf. Die Straklatte wurde an einzelnen Punkten durch Gewichten fixiert. Durch ein entfernen der Gewichte, auch Molche genannt, wurde nun der Kurvenverlauf beeinflusst. Die Molche stellten dementsprechend das Äquivalent eines Knotenpunktes dar.

Schiel schreibt rückblickend, dass es für diese Aufgabe war es zwingend nötig war, ein rechnergestütztes Werkzeug zu entwickeln mit dem man beliebige Kurven und gekrümmte Flächen beschreiben kann. Weiterhin schreibt er: „Wir begannen zunächst mit Polynomen zu experimentieren.“ (Ebd.)

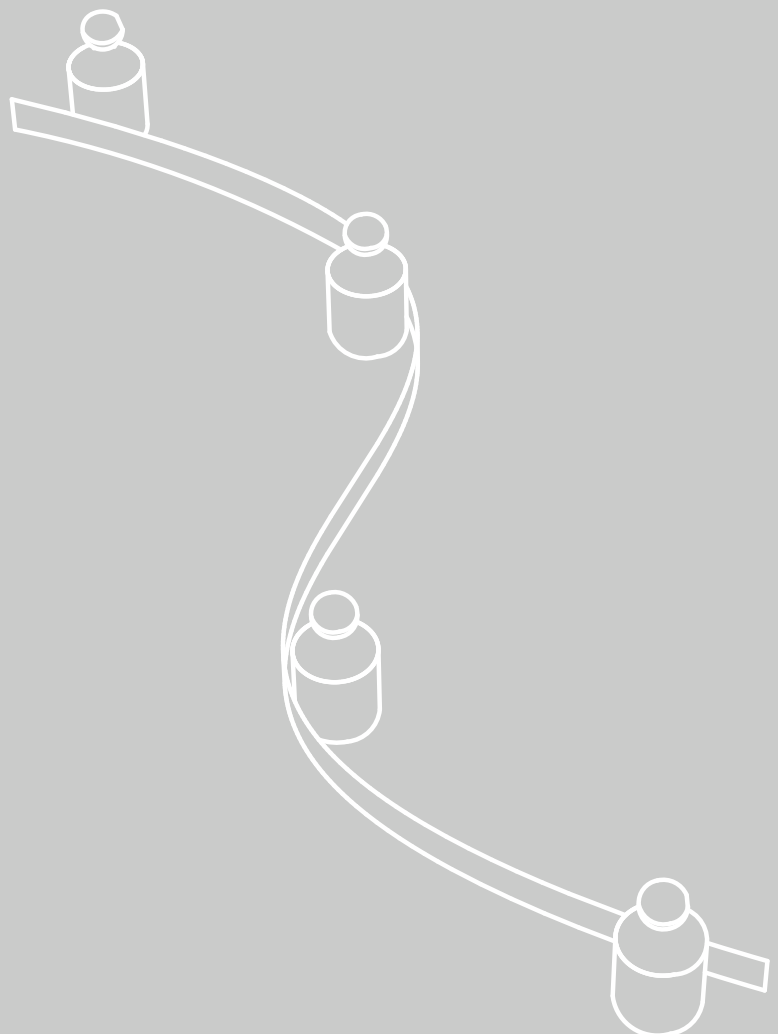
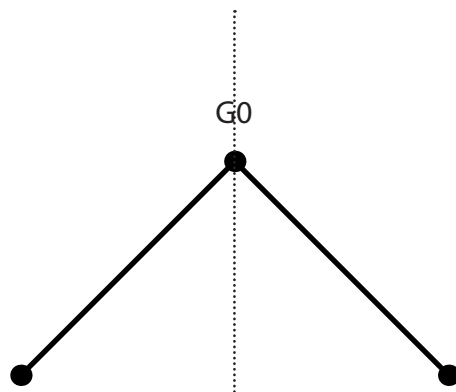
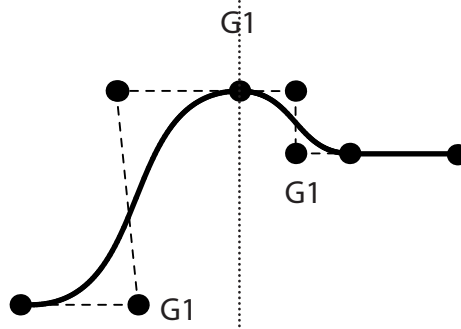


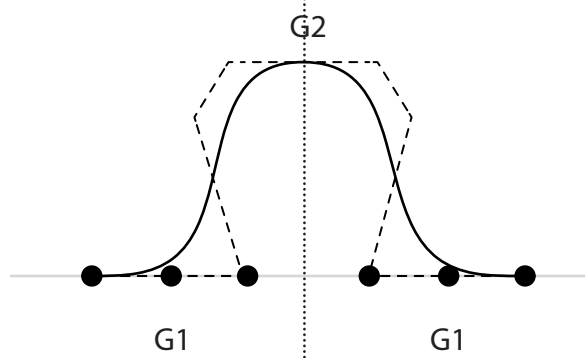
Abb.: Straklatte



G0 Stetigkeit



G1 Stetigkeiten

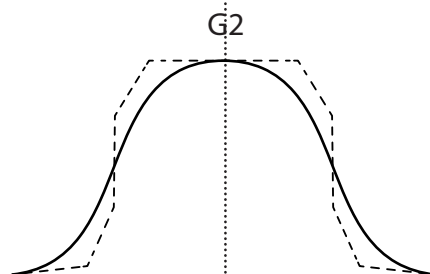


G2 Stetigkeit

&

G1 Stetigkeit

G2 Stetigkeit



keine Stetigkeit