

Лабораторная работа № 4

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

Цель работы

Изучить теорию резонансных радиотехнических цепей – колебательных контуров (последовательного и параллельного). Исследовать АЧХ и ФЧХ параллельного колебательного контура, определить резонансную частоту и добротность контура. Найти характеристики нагруженного колебательного контура.

Теоретические сведения

Одной из важнейшей задач радиотехники является осуществление так называемой *частотной избирательности* (или *селективности*) радиоустройств.

Для решения задачи избирательности необходимо располагать частотно-избирательными цепями. В лабораторной работе № 3 «Исследование RC-цепей» рассмотрены простейшие частотно-избирательные цепи, содержащие, кроме активного сопротивления, один реактивный элемент. Хотя такие цепи широко применяются в радиотехнической практике, надо иметь в виду, что одна из граничных частот полосы пропускания этих цепей равна либо нулю, либо бесконечности, в то время как осуществление избирательности в общем случае требует, чтобы обе граничные частоты были конечны.

Чаще в качестве частотно-избирательных цепей используют *колебательные системы*.

Последовательный колебательный контур

Последовательный колебательным контуром называется цепь, составленная из катушки индуктивности L и конденсатора C , соединённых последовательно относительно входных зажимов, к которым может быть подключён генератор или другие элементы цепи. Обычно в состав колебательного контура включается активное сопротивление R , которое определяет сопротивление омических потерь провода, из которого выполнена индуктивность.

Рассмотрим цепь, состоящую из последовательно включённых катушки индуктивности L , конденсатора C и резистора R (рис. 1).

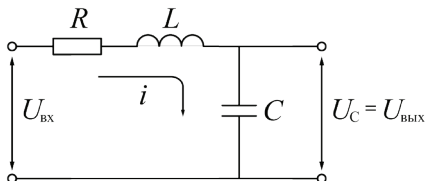


Рис. 1. Последовательный колебательный контур

Положим, что на входе последовательного контура действует гармоническое напряжение с амплитудой $U_{\text{вх}}$ и частотой ω . Запишем полное входное сопротивление контура

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}, \quad (1)$$

где $j\omega L$ и $\frac{1}{j\omega C}$ – реактивные сопротивления соответственно индуктивности и ёмкости.

Формулу (1) для полного входного сопротивления можно переписать в виде:

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX. \quad (2)$$

Здесь $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ – реактивная составляющая входного сопротивления.

В зависимости от соотношения величин индуктивного сопротивления $X_L = \omega L$ и ёмкостного сопротивления $X_C = \frac{1}{\omega C}$ могут иметь место три случая:

- 1) $X_L > X_C$; тогда $X > 0$, и, следовательно, реактивная составляющая входного сопротивления имеет индуктивный характер;
- 2) $X_L < X_C$; реактивная составляющая входного сопротивления $X < 0$, т.е. она имеет ёмкостной характер;
- 3) $X_L = X_C$; реактивная составляющая входного сопротивления равна нулю ($X = 0$).

Особый интерес представляет случай 3), когда $X_L = X_C$. Рассмотрим его более подробно.

Выполнение условия $X_L = X_C$ означает, что реактивная составляющая входного сопротивления несмотря на наличие реактивных элементов равна нулю. Такой режим работы цепи называется *резонансом*. При резонансе полное входное сопротивление цепи чисто активно:

$$Z = R, \quad (3)$$

Амплитуды напряжений на реактивных элементах равны между собой:

$$U_L^{\text{рез}} = U_C^{\text{рез}}.$$

При этом сдвиг фаз между э.д.с. и током в цепи $\varphi = 0$. Приложенная э.д.с. уравнивается только падением напряжения на активном сопротивлении ($E = I^{\text{рез}} R$).

В контуре с заданными параметрами L и C резонанс наступает при определённой частоте ω_0 , величина которой определяется из равенства

$$X = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 ,$$

откуда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} . \quad (4)$$

Частота, при которой реактивная составляющая входного сопротивления равна нулю, называется *резонансной частотой колебательного контура*.

Резонансная частота контура зависит от параметров реактивных элементов L и C и возрастает с их уменьшением.

Угловой частоте ω_0 соответствуют циклическая частота:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} , \quad (5)$$

и длина волны:

$$\lambda_0 = \frac{c}{\omega_0} = 2\pi c\sqrt{LC} , \quad (6)$$

где c – скорость света.

Когда $\omega = \omega_0$, то говорят, что контур *настроен* на частоту источника. Если $\omega \neq \omega_0$, то контур *расстроен*.

В настроенном контуре индуктивное и емкостное сопротивления реактивных элементов равны между собой:

$$\omega_0 L_0 = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{U_{\kappa}}{I_0} . \quad (7)$$

Подставив в (7) вместо ω_0 её значение из (4), получим

$$\omega_0 L_0 = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} . \quad (8)$$

Величина

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L_0 = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{U_{\kappa}}{I_0} \quad (9)$$

называется *характеристическим сопротивлением* колебательного контура. Характеристическое сопротивление равно отношению амплитуд напряжения на каждом из реактивных элементов контура и тока при резонансе, т.е. представляет собой реактивное сопротивление индуктивности или ёмкости на частоте резонанса. Величина характеристического сопротивления определяется только параметрами контура L и C . В колебательных контурах, используемых в радиотехнических цепях, $\rho \approx 100 \div 500$ Ом.

Осуществить резонанс в колебательном контуре можно двумя основными способами: а) изменяя частоту источника при неизменных параметрах контура так, чтобы она оказалась равной резонансной частоте контура; б)

изменяя при неизменной частоте источника параметры контура L и C (или один из них) таким образом, чтобы его резонансная частота стала равной частоте воздействующих колебаний.

Ток в последовательном контуре равен:

$$i = \frac{E}{Z} = \frac{E}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \quad (10)$$

При настройке контура в резонанс его полное входное сопротивление чисто активно, т.е. $Z = R$. Следовательно, ток в контуре достигает своего максимального значения

$$I_0 = \frac{E}{R}. \quad (11)$$

Расстройка контура влечёт за собой уменьшение амплитуды тока до величины

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + X^2}}. \quad (12)$$

Полное входное сопротивление контура (2) можно преобразовать к виду

$$Z = R \left[1 + j \frac{\rho}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] = R \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] = R(1 + j\xi), \quad (13)$$

где

$$\xi = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) - \text{обобщённая расстройка};$$

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{d} - \text{добротность контура};$$

$$d = \frac{1}{Q} - \text{затухание контура}.$$

С затуханием контура d связана ещё одна величина – коэффициент затухания α :

$$2\alpha = \omega_0 d = \frac{R}{\rho} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{L}.$$

Введём понятие частотного коэффициента передачи по току:

$$\dot{K}_I = \frac{\dot{I}}{I_0} = \frac{1}{1 + j\xi} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{j\varphi}, \quad (14)$$

где φ – величина сдвига входного сигнала на выходе контура.

Обобщённая расстройка может быть записана в виде

$$\xi = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} = Q \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega \omega_0} . \quad (15)$$

При больших добротностях ($Q \gg 1$) частоты сигналов, проходящих через контур, не сильно отличаются от резонансной частоты, т.е. имеем $\omega \approx \omega_0$, и обобщённую расстройку можно приближённо записать как

$$\xi \approx Q \frac{2\omega(\omega - \omega_0)}{\omega \omega_0} = 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} , \quad (16)$$

где $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ – абсолютная расстройка контура относительно частоты входного сигнала.

Подставив в (14) значение ξ из (16), найдём модуль частотного коэффициента передачи для малой расстройки частоты

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^2}} . \quad (17)$$

Данная функция представляет собой АЧХ контура. Графически АЧХ изображается *резонансной кривой* (рис. 2).

Границы полосы пропускания колебательного контура определяются по уровню $\frac{1}{\sqrt{2}}$ от максимального значения при резонансе. Ширина полосы пропускания поэтому равна

$$2\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} . \quad (18)$$

В выражении (14) аргумент функции определяется формулой

$$\varphi = \arctg \left(2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) , \quad (19)$$

и представляет собой ФЧХ контура для малых расстроек (см. рис. 2).

Так как на частоте резонанса напряжения на контуре $U_{\text{вх}} = I_0 R$ и $U_{\text{вых}} = U_C = I_0 \rho$, то коэффициент передачи контура по напряжению равен:

$$K_U = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{U_C}{U_{\text{вх}}} = \frac{\rho}{R} = Q . \quad (20)$$

Итак, получаем, что при настройке контура в резонанс амплитуда напряжения на конденсаторе (или индуктивности) в Q раз больше амплитуды входного напряжения. Поэтому резонанс в последовательном контуре называют *резонансом напряжений*.

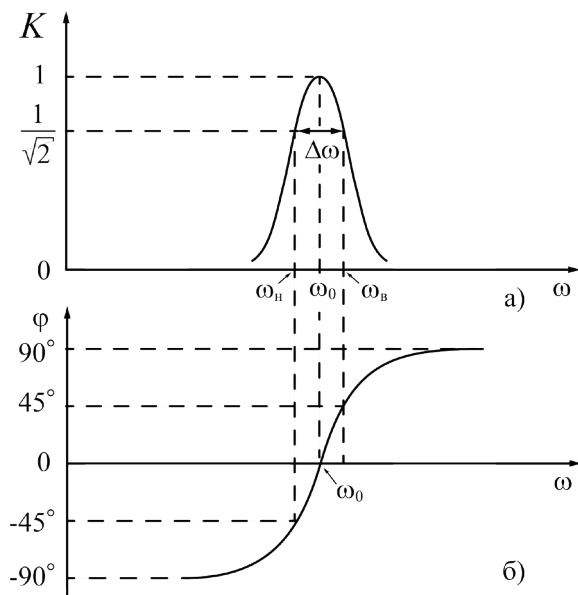


Рис. 2. Характеристики последовательного колебательного контура:
а) – амплитудно-частотная (АЧХ), б) – фазочастотная (ФЧХ)

Полоса пропускания

В области некоторой полосы частот отклик линейной цепи на входное воздействие начинает уменьшаться. В связи с этим используют *понятие полосы пропускания* (или *рабочей полосы*) – области частот, где модуль коэффициента передачи $|K(\omega)|$ имеет значение не менее $\frac{1}{\sqrt{2}}$ от своего максимального значения. Часто, при практических расчётах используют нормированный модуль коэффициента передачи K/K_{\max} , максимальное значение которого равно единице. Значение $\frac{1}{\sqrt{2}}=0,707$, по которому определяют полосу пропускания линейной цепи, введено не случайно. Дело в том, что на границах полосы пропускания модуль коэффициента передачи **по мощности**, равный отношению выходной и входной мощностей, уменьшается в **два** раза.

На рис. 2 полоса пропускания линейной цепи заключена в области от нижней ω_H до верхней ω_B круговой частоты, и поэтому её ширина определяется как $\Delta\omega = \omega_B - \omega_H$. При практических расчётах часто пользуются не круговой, а циклической частотой $f = \omega/(2\pi)$. В этом случае полоса пропускания цепи

$$\Delta f = f_B - f_H, \quad (21)$$

где f_H – нижняя, и f_B – верхняя граничные циклические частоты.

Параллельный колебательный контур

Параллельный колебательный контур состоит из параллельно соединенных индуктивности L и ёмкости C , а в цепь индуктивности включено сопротивление её потерь R (рис. 3).

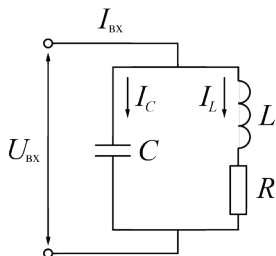


Рис. 3. Параллельный колебательный контур

При этом полное входное сопротивление контура

$$Z = \frac{(R + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{(R + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \quad (22)$$

Для резонансной частоты ω_0 справедливо равенство

$$\omega_0 L = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho. \quad (23)$$

Предположим, что контур имеет высокую добротность. Тогда можно записать: $Q = \frac{\rho}{R} \gg 1$, и, следовательно, справедливо неравенство:

$$\rho = \omega_0 L \gg R. \quad (24)$$

В этом случае выражение (22) существенно упрощается:

$$Z \approx \frac{j\omega L \frac{1}{j\omega C}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\frac{L}{C}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \quad (25)$$

Воспользовавшись формулой (13), запишем

$$Z = \frac{\frac{L}{C}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\frac{L}{C}}{R(1 + j\xi)} = \frac{\rho^2}{R(1 + j\xi)}. \quad (26)$$

Введём величину

$$R_0 = \frac{\rho^2}{R} = \rho Q = RQ^2, \quad (27)$$

которую называют *резонансным сопротивлением параллельного контура*.

Тогда формула преобразуется к виду:

$$Z = \frac{\rho^2}{R(1+j\xi)} = \frac{R_0}{1+j\xi}. \quad (28)$$

Аналитически АЧХ параллельного контура отражается зависимостью нормированного по резонансному сопротивлению модуля входного сопротивления от величины абсолютной расстройки

$$K_z = \frac{z}{R_0} = \frac{R_0}{R_0 \sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (29)$$

ФЧХ параллельного контура определяется следующим выражением

$$\varphi = -\arctg\left(2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right), \quad (30)$$

Графики АЧХ и ФЧХ параллельного контура показаны на рис. 4.

Вычислим частотный коэффициент передачи контура по току. Для этого найдём отношение тока ёмкости (или индуктивности) к входному току. На резонансной частоте этот параметр выразится простой формулой

$$K_I(\omega_0) = Q. \quad (31)$$

Таким образом, на резонансной частоте ток в параллельном контуре в Q раз больше входного тока. Поэтому резонанс в параллельном контуре называют *резонансом токов*.

Полоса пропускания параллельного контура, как и последовательного, определяется формулой (18).

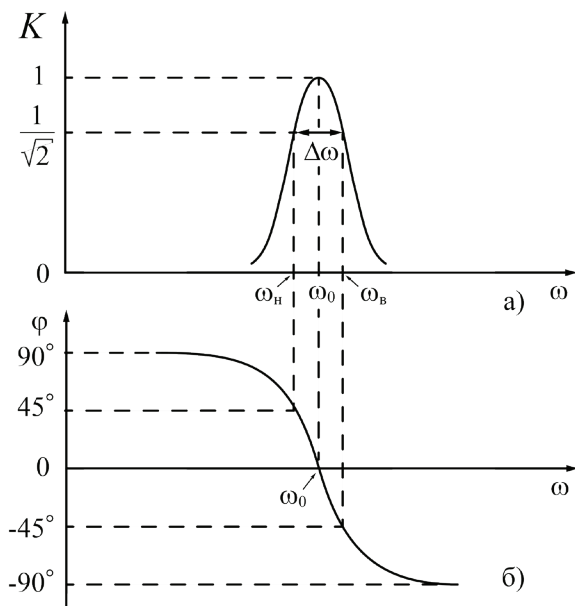


Рис. 4. Характеристики параллельного колебательного контура:
а) – амплитудно-частотная (АЧХ), б) – фазочастотная (ФЧХ)

1. Описание схем опытов

1.1. Объект исследования:

Колебательный контур. Исследования проводятся в режиме свободных колебаний и в режиме вынужденных колебаний.

1.2. Назначение схемных элементов:

V1 – источник напряжения в виде периодической последовательности импульсов.

V2 – источник переменного напряжения.

L1 – катушка индуктивности, входящая в состав колебательного контура.

C1, C2 – конденсаторы, входящие в состав колебательного контура.

1.3. Измерительные приборы:

XSC1 – осциллограф; используется для контроля формы сигнала на выходе колебательного контура;

XMM1 – мультиметр; используется снятия значений напряжения на выходе колебательного контура;

ХВР1 – плоттер Боде; используется для снятия амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик.

2. Экспериментальное исследование

Задание

Перед выполнением работы следует проработать теорию резонансных цепей – колебательных контуров (последовательного и параллельного) (кратко изложена в начале данного описания), а также их работу в режимах свободных и вынужденных колебаний.

Внимание: При выполнении экспериментальных исследований для сборки схем следует использовать элементы с номиналом в соответствии с номером варианта (см. Приложение). Номер варианта соответствует номеру лабораторной подгруппы; указывается преподавателем.

2. Исследование свободных колебаний в электрическом контуре.

Собрать схему, изображённую на рис. 5.

Включена ёмкость C1, переключатель J2 разомкнут.

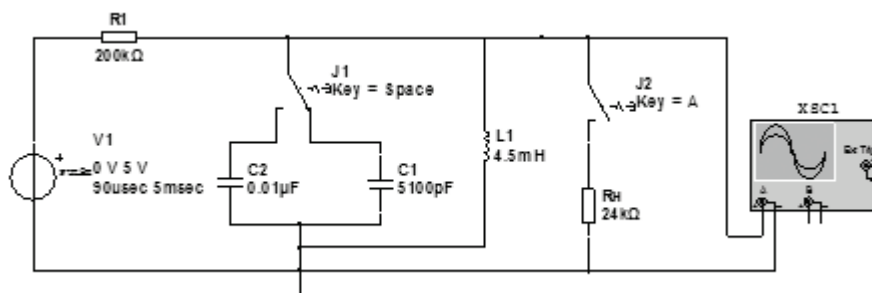


Рис. 5. Схема для исследований свободных колебаний в колебательном контуре

2.1. Запустить режим моделирования. Получить на экране осциллографа стабильную картину затухающих колебаний. Изменяя в небольших пределах длительность импульсов, добиться максимальной амплитуды колебаний.

2.2. Измерить период T свободных колебаний. Для этого увеличить скорость развёртки осциллографа так, чтобы на экране наблюдалось один-два периода колебаний. С помощью масштабной сетки на экране определить T и вычис-

лить $f_1 = \frac{1}{T}$.

Для измерения коэффициента затухания α найти время (по горизонтальной шкале), в течение которого амплитуда импульсов уменьшается в два раза. Это будет время τ' . Вычислить $\tau \approx 1,44\tau'$.

Коэффициент затухания $\alpha = \frac{1}{\tau}$.

2.3. Включить ёмкость C2 (переключатель J2 по-прежнему разомкнут) и повторить все измерения.

2.4. Для обоих значений ёмкости C1 и C2, зная значение коэффициента затухания α , вычислить величины ω_1 , R , Q , ρ , (где ω_1 – угловая частота собственных колебаний; R – сопротивление потерь, Q – добротность; ρ – характеристическое сопротивление). Для этого следует воспользоваться соотношениями:

$$\omega_1 = \frac{1}{f_1},$$

$$R = 2\alpha L$$

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{d} = \frac{\omega_0}{2\alpha},$$

$$\rho = QR.$$

Теоретические значения ω_0 рассчитать по параметрам контура L и C , приведённым на схеме.

3. Исследование колебательного контура в режиме вынужденных колебаний.

3.1. Получение амплитудно-частотных характеристик контура.

1) Собрать схему, изображённую на рис. 6.

Включена ёмкость C1, переключатель J2 разомкнут.

3.1.1. Установить на генераторе частоту, примерно равную частоте f_1 , найденной в п. 2.2. Установить на входе макета амплитуду сигнала, равную 5 В.

Изменяя частоту генератора с шагом 100 Гц вблизи значения f_1 , снять зависимость амплитуды напряжения на контуре от частоты.

3.1.2. Включить ёмкость C2 (переключатель J2 разомкнут) и повторить все измерения.

3.1.3. По полученным данным построить резонансные кривые.

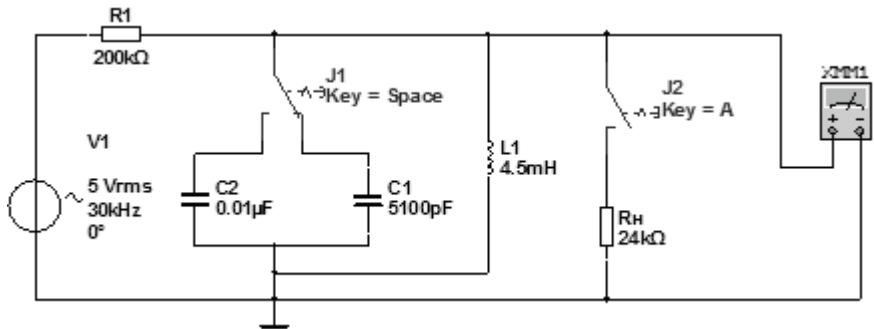


Рис. 6. Схема для исследований колебательного контура в режиме вынужденных колебаний

3.1.4. По резонансным кривым определить $f_{\text{рез}}$, $\Delta f_{0,7}$, Q . Для определения Q воспользоваться формулой:

$$Q = \frac{f_{\text{рез}}}{\Delta f_{0,7}}.$$

3.1.5. С помощью формулы: $Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{2\alpha}$

вычислить сопротивление потерь R для обеих резонансных частот. Сравнить полученные значения с результатами, полученными в п. 2.4.

2) Собрать схему, изображённую на рис. 7.

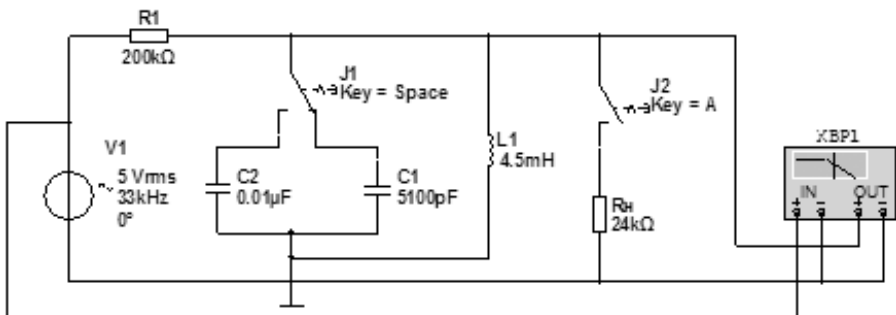


Рис. 7. Схема для исследований колебательного контура в режиме вынужденных колебаний при помощи плоттера Боде

3.1.6. Прodelать все измерения п. 3.1.1 и п. 3.1.2 при помощи другой схемы, в которой вместо вольтметра используется плоттер Боде, позволяющий снимать амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики.

3.1.7. Переключить плоттер Боде в режим измерения АЧХ. Изменяя частоту посредством передвижения маркера по горизонтальной оси, снять амплитудно-частотную характеристику колебательного контура. По результатам измерений построить резонансные кривые. Сравнить их с кривыми, построенными в п.3.1.3.

3.1.8. Включить переключателем J2 сопротивление нагрузки R_n , переключателем J1 – ёмкость C1. Изменяя частоту, снять зависимость амплитуды выходного напряжения от частоты. Построить резонансную кривую нагруженного контура.

3.1.9. Переключателем J1 включить ёмкость C2. Повторить измерения п. 3.1.8.

3.1.10. Определить по резонансным кривым полосу пропускания $\Delta f'_{0,7}$ и добротность Q' для нагруженного контура.

3.2. Получение фазочастотных характеристик контура.

1) Собрать схему, изображённую на рис. 7.

Включена ёмкость C1, переключатель J2 разомкнут. Измерения проводятся при помощи плоттера Боде.

3.2.1. Переключить плоттер Боде в режим измерения ФЧХ. Изменяя частоту, снять фазочастотную характеристику контура. Построить зависимость на графике.

3.2.2. Повторить измерения п. 3.2.1 при включённом сопротивлении нагрузки (переключатель J2 включён). Сравнить полученные результаты.

3.2.3. Повторить все измерения и построения для другого контура (включена ёмкость C2).

Все результаты (расчёты и графики) представить в виде отчёта.

4. Содержание отчета:

- 1) цель работы;
- 2) схемы для исследования электрического колебательного контура;
- 3) расчётные данные, полученные при свободных колебаниях и в режиме вынужденных колебаний (α – коэффициент затухания; ω_0 – резонансная угловая частота; ω_1 – угловая частота собственных колебаний; Q – добротность; ρ – арактеристическое сопротивление; R – сопротивление потерь);
- 4) экспериментальные графики (амплитудно-частотные характеристики, фазочастотные характеристики) для колебательного контура при разных режимах работы;
- 5) экспериментальные графики, полученные при помощи плоттера Бодде;
- 6) данные, полученные по результатам экспериментальных исследований (полоса пропускания, добротность контура);
- 7) выводы по результатам экспериментального исследования.

Приложение

Таблица

Варианты заданий параметров колебательных контуров

| Номер варианта | Сопротивление R_n , кОм | Индуктивность L_1 , мГн | Ёмкость C_1 , пФ | Ёмкость C_2 , нФ |
|-------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1. | 24 | 4,5 | 5100 | 10 |
| 2. | 22 | 4,7 | 5000 | 9,5 |
| 3. | 20 | 5 | 4700 | 9,1 |
| 4. | 18 | 5,4 | 4300 | 9 |
| 5. | 30 | 5,6 | 4000 | 8,7 |
| 6. | 25 | 6 | 3900 | 8,2 |
| 7. | 27 | 4,4 | 5200 | 11 |
| 8. | 15 | 4 | 5600 | 12 |
| 9. | 16 | 3,8 | 6200 | 13 |
| 10. | 28 | 3,3 | 6800 | 15 |

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называют свободными, какие – вынужденными?
2. От чего зависят частота свободных колебаний и коэффициент затухания?
3. Как измерить частоту свободных колебаний и коэффициент затухания с электрическом контуре?
4. Что называют постоянной времени контура? Каков физический смысл этой величины?
5. Чем обусловлены потери энергии в колебательном контуре? Как определить сопротивление потерь?
6. В каком случае колебательный контур называют параллельным?
7. Что называют эквивалентным сопротивлением параллельного контура?
8. Как зависят модуль и фаза эквивалентного сопротивления параллельного контура от частоты?
9. Какую частоту называют резонансной?
10. Как определить полосу пропускания колебательного контура?
11. Каков энергетический смысл понятия добротности колебательной системы?
12. Каким образом подключение нагрузки влияет на резонансные свойства колебательного контура?